

**ANALISIS DINAMIK MODEL DAMPAK MEDIA DALAM
PENGENDALIAN PENYAKIT DENGAN MENGGUNAKAN
LAJU TRANSMISI *PIECEWISE***

SKRIPSI

oleh:

MIFTAHUL FIRDAUS

145090407111012



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**



**ANALISIS DINAMIK MODEL DAMPAK MEDIA DALAM
PENGENDALIAN PENYAKIT DENGAN MENGGUNAKAN
LAJU TRANSMISI *PIECEWISE***

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Matematika

oleh:

MIFTAHUL FIRDAUS

145090407111012



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ANALISIS DINAMIK MODEL DAMPAK MEDIA DALAM PENGENDALIAN PENYAKIT MENGGUNAKAN LAJU TRANSMISI *PIECEWISE*

oleh
MIFTAHUL FIRDAUS
145090407111012

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 6
Juli 2018 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Indah Yanti, S.Si., M.Si.
NIP.197911292005012002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D.
NIP.197509082000031003



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Miftahul Firdaus
NIM : 145090407111012
Jurusan : Matematika
**Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Dampak Media
Dalam Penyebaran Penyakit dengan
Menggunakan Laju Transmisi
*Piecewise***

dengan ini menyatakan bahwa:

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil menjiplak dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada Daftar Pustaka hanya digunakan sebagai acuan.
2. Apabila di kemudian hari Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 6 Juli 2018
yang menyatakan,

Miftahul Firdaus
NIM. 145090407111012



ANALISIS DINAMIK MODEL DAMPAK MEDIA DALAM PENGENDALIAN PENYAKIT DENGAN MENGGUNAKAN LAJU TRANSMISI *PIECEWISE*

ABSTRAK

Pada Skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model dampak media dalam pengendalian penyakit dengan menggunakan laju transmisi *piecewise*. Pada model terdapat dua sistem, sistem pertama tanpa pengaruh media dan sistem kedua terdapat pengaruh media. Pada model dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (R_0), analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan. Hasil analisis dinamik menunjukkan bahwa model memiliki tiga titik kesetimbangan pada masing-masing sistem, yaitu dua titik kesetimbangan bebas penyakit dan satu titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global ketika $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global ketika $R_0 > 1$. Perubahan jumlah dampak media memberikan pengaruh pada jumlah populasi terinfeksi. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis.

Kata kunci: analisis dinamik, angka reproduksi dasar, dampak media, laju transmisi *piecewise*



DYNAMICAL ANALYSIS OF MODELLING THE IMPACT OF MEDIA IN CONTROLLING THE DISEASES WITH A *PIECEWISE* TRANSMISSION RATE

ABSTRACT

This final project is discussed the construction and dynamical analysis of modelling the impact of media in controlling the diseases with a *piecewise* transmission rate. In the model there are two systems, the first system without the impact of media and the second system there is impact of media. Dynamical analysis is performed by finding the equilibria and the basic reproduction number (R_0), analyzing the local and global stability of equilibria. The results of dynamic analysis indicate that the model has three equilibrium points on each system, two points of disease-free equilibrium and a endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point is a global and local asymptotically stable at $R_0 < 1$, meanwhile the endemic equilibrium point is global and local asymptotically stable at $R_0 > 1$. The amount of media impacts affects the infective population. The numerical simulation is conducted show results consistent with the result of analysis.

Keywords: *dynamic analysis, basic reproduction number, impact of media, piecewise transmission rate*



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah Subhanahuwata'ala yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Model Dampak Media Dalam Pengendalian Penyakit dengan Menggunakan Laju Transmisi Piecewise* dengan lancar. Shalawat dan salam selalu tercurahkan kepada Rasulullah Shallallahu'alaihiwasallam sebagai suri teladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Indah Yanti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing Skripsi sekaligus dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, motivasi, dan saran yang diberikan kepada penulis untuk menyelesaikan Skripsi ini dengan baik dan benar.
2. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D. dan Dr. Moch. Aruman Imron, M.Si. selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika, Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika, Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
4. Amah (Alm. Djoenaedy), Ibu (Nur Istiqomah), mbak-mbak (Elicia Dhaniar Fairush dan Kholifatatus Sa'Diyah), keponakan (Azzahra Zaskia Syareefa) dan keluarga besar tercinta yang selalu mendoakan dan memberi dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan Skripsi ini.
5. Purwaningtias Aprianti, Dinda Ayu Retno Nuraini, Noraniza Bahrotul Ilmi, Rizqiyatul Ula, Yohana Esterlita Lumbantobing, Ardhi Sanjaya dan Handal Bahas Ulum atas waktu, ilmu dan bantuannya dalam penulisan Skripsi ini.

6. Teman belajar analisis terapan Hanesty Astinov Cimi, Nungky Hendarti, dan Eka Yuliansyah atas ilmu, dukungan dan doanya.
7. CCLUB, Keluarga Besar Matematika 2014, dan keluarga HIMAMASTA atas kebersamaan selama perkuliahan.
8. Teman satu rumah Agus Dwi Ariyati atas nasihat, doa, dan kebersamaannya.
9. Sahabat-sahabat penulis Lisa, Ira, Ontar, Diaz, Dea, Safira, Nichi, Aras, Ona, Nisac, Sella, Icong, Rizky, Meza, Atikah, Retha, Ines, Tias, Agus, Yola, Rina, Khoi, Mega, dan Ula yang telah mendengar keluh kesah, memberi nasihat, semangat dan saran kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun dapat dikirim melalui email miftahul.firdaus11@gmail.com guna perbaikan pada penulisan selanjutnya. Semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 6 Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	3
BAB II DASAR TEORI	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Dinamik	6
2.2.1 Sistem otonomus	6
2.2.2 Sistem otonomus linear	7
2.2.3 Sistem otonomus nonlinear	8
2.3 Angka Reproduksi Dasar	10
2.4 Kriteria Routh-Hurwitz	11
2.5 Analisis Kestabilan Global	12
2.5.1 Fungsi Lyapunov	12
2.5.2 Kriteria Dulac	13
2.6 Fungsi <i>Piecewise</i>	14
2.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat	14
BAB III PEMBAHASAN	17
3.1 Konstruksi Model	17
3.1.1 Laju perubahan populasi rentan	18
3.1.2 Laju perubahan populasi terinfeksi	18
3.1.3 Laju perubahan populasi sembuh	19
3.1.4 Laju perubahan kepadatan kumulatif media	20
3.2 Titik Kesetimbangan	21
3.2.1 Titik kesetimbangan tanpa efek media	22
3.2.2 Titik kesetimbangan dengan efek media	25

3.3	Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan	29
3.3.1	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{11} . . .	29
3.3.2	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{12} . . .	30
3.3.3	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{13}^* . . .	30
3.3.4	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{21} . . .	32
3.3.5	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{22} . . .	32
3.3.6	Kestabilan lokal titik keseimbangan E_{23}^* . . .	33
3.4	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan	35
3.4.1	Kestabilan global sistem tanpa efek media titik keseimbangan E_{12}	35
3.4.2	Kestabilan global dengan efek media titik keseimbangan E_{22}	35
3.4.3	Kestabilan global sistem tanpa efek media titik keseimbangan E_{13}^*	36
3.4.4	Kestabilan global sistem dengan efek media titik keseimbangan E_{23}^*	37
3.5	Simulasi Numerik	39
3.5.1	Simulasi numerik pada sistem tanpa pengaruh media	39
3.5.2	Simulasi numerik pada sistem dengan pengaruh media	41
3.5.3	Pengaruh dampak media terhadap populasi terinfeksi	44
BAB IV	PENUTUP	45
4.1	Kesimpulan	45
4.2	Saran	45
	DAFTAR PUSTAKA	47
	LAMPIRAN	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik fungsi $f(x)$	14
Gambar 3.1	Model kompartemen SIR dengan media . . .	17
Gambar 3.2	Potret fase sistem tanpa efek media, $R_0 < 1$.	40
Gambar 3.3	Potret fase sistem tanpa efek media, $1 < R_0 < R_c$	41
Gambar 3.4	Potret fase sistem dengan pengaruh media, $R_0 < 1$	42
Gambar 3.5	Potret fase sistem pengaruh media, $R_c < R_0$.	43
Gambar 3.6	Pengaruh media terhadap populasi terinfeksi .	44





DAFTAR LAMPIRAN





BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Media adalah salah satu alat komunikasi yang berfungsi untuk menyampaikan informasi antar manusia. Media dapat menyampaikan suatu informasi mulai dari benda, orang, tempat, atau suatu kejadian. Menurut Nova dan Firsan (2009), media dapat dibedakan menjadi media elektronik dan media cetak. Media elektronik terdiri dari televisi, radio, dan internet. Sedangkan media cetak terdiri dari koran, majalah, buletin, dan brosur.

Media memiliki peranan penting dalam pengendalian dan penyebaran informasi wabah penyakit. Dunia pernah mengalami wabah penyakit mematikan, seperti SARS (2003) di Cina, H1N1 (2009) di Meksiko, dan Ebola (2014) di Afrika. Pada saat terjadi suatu wabah penyakit, penyebaran dan perkembangannya akan diliput oleh media, antara lain program televisi, koran dan internet. Liu, dkk. (2007) menjelaskan bahwa informasi yang disampaikan media meliputi jumlah individu terinfeksi dan angka kematian yang memiliki dampak penting dalam pengendalian penyakit.

Liu, dkk. (2007) menggunakan model matematika untuk mengukur dampak media dalam melaporkan jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh terhadap penyebaran beberapa wabah penyakit menular yang muncul. Cui, dkk. (2008) mengembangkan model kompartemen transmisi kontak. Transmisi kontak mengukur penyebaran virus dari individu terinfeksi ke individu rentan dengan menggunakan media dalam penyebaran informasinya. Tchenche, dkk. (2011) menjelaskan dampak liputan media terhadap jumlah individu terinfeksi dan individu yang berhasil tervaksinasi terhadap penyebaran influenza.

Media informasi dapat mempengaruhi perilaku masyarakat dalam menanggapi penyebaran penyakit. Ketika informasi wabah penyakit menyebar, masyarakat akan memutuskan cara untuk mencegah atau mengobati penyakit tersebut. Pada tahap awal terjadi wabah penyakit, pada umumnya orang tidak menyadari adanya penyebaran penyakit

sampai terjadi wabah. Tindakan pencegahan dilakukan jika jumlah individu yang menular mencapai dan melampaui tingkat tertentu. Berdasarkan hal yang telah diuraikan, maka skripsi ini mengkaji kembali model matematika dampak media terhadap pengendalian penyakit menggunakan laju transmisi *piecewise* yang ditulis oleh Liu, dkk. (2016). Liu memperkenalkan suatu fungsi yang menggambarkan perubahan jumlah populasi terinfeksi pada keadaan tertentu. Pada laju transmisi *piecewise* didefinisikan jumlah individu terinfeksi konstan jika tidak ada media yang meliputi wabah penyakit dan jumlah individu terinfeksi berkurang jika ada media yang meliputi wabah penyakit. Untuk mendukung hasil analisis dinamik, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan pada skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana konstruksi model matematika dampak media terhadap pengendalian penyakit dengan menggunakan laju transmisi *piecewise*?
2. Bagaimana titik kesetimbangan model tersebut?
3. Bagaimana analisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan model tersebut?
4. Bagaimana hasil dan interpretasi dari simulasi numerik model tersebut?

1.3 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah

1. mengonstruksi model matematika dampak media massa terhadap pengendalian penyakit dengan menggunakan laju transmisi *piecewise*,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. menganalisis kestabilan lokal dan global titik kesetimbangan model, dan
4. menginterpretasikan hasil simulasi numerik model.





BAB II DASAR TEORI

Teori pendukung yang digunakan pada skripsi ini adalah persamaan diferensial, sistem dinamik, angka reproduksi dasar, kriteria Routh-Hurwitz analisis kestabilan global, piecewise dan metode Runge-Kutta orde empat.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde dari persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang ada pada suatu persamaan. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n , dapat dinyatakan sebagai

$$F[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)] = 0, \quad (2.1)$$

dengan t merupakan variabel bebas, x merupakan variabel tak bebas, dan $x^{(n)}$ menyatakan turunan ke- n dari x terhadap t . Untuk memudahkan penulisan persamaan diferensial, digunakan notasi y untuk menyatakan $x(t)$ dan $y', y'', \dots, y^{(n)}$ untuk menyatakan $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$, sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis

$$F[t, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0. \quad (2.2)$$

Persamaan diferensial biasa (2.2) dikatakan linear jika F adalah fungsi linear dari variabel $y, y', \dots, y^{(n)}$. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde ke- n adalah

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (2.3)$$

dengan $a_0 \neq 0$. Persamaan diferensial yang tidak memenuhi bentuk (2.3) disebut persamaan diferensial biasa nonlinear

(Boyce dan DiPrima, 2012).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang senantiasa berubah dan situasi di masa yang akan datang dapat diketahui apabila situasi saat ini atau situasi di masa lalu diketahui. Sistem dinamik dibagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskret. Sistem dinamik diskret memiliki bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

dan sistem dinamik kontinu memiliki bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

(Alligood,dkk.,2000).

2.2.1 Sistem otonomus

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

dengan fungsi $f(\vec{x})$ fungsi kontinu dan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t .

(Boyce dan DiPrima, 2012).

Definisi 2.1 (Titik Keseimbangan)

Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi $f_i(\vec{x}) = 0$ disebut titik kritis sistem (2.6). Titik kritis \vec{x}^* merupakan solusi sistem (2.6) yang bernilai konstan karena $\frac{df_i(\vec{x})}{dt} = 0$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{df_i(\vec{x})}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik keseimbangan, sehingga titik kritis disebut juga titik keseimbangan (Boyce dan DiPrima, 2012).

Definisi 2.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dikatakan:

1. stabil, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.6) pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. stabil asimtotik, jika \vec{x}^* stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika terdapat suatu solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.6) memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

akan berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tidak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria stabil.

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.2.2 Sistem otonomus linear

Diberikan sistem otonomus linear berdimensi n sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.7}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{2.8}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Jika $\det(A) \neq 0$, maka $\vec{x} = \vec{0}$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.8). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.8) dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.1 (Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Linear)

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = \vec{0}$ sistem (2.8) bersifat

1. stabil, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real tak positif,
2. stabil asimtotik, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif, dan
3. tidak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks A memiliki bagian real positif.

(Finizio dan Ladas, 1982)

2.2.3 Sistem otonomus nonlinear

Diberikan sistem otonomus nonlinear berdimensi n sebagai berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

dengan f_i merupakan fungsi nonlinear. Misal \vec{x}^* adalah titik kesetimbangan sistem (2.9). Jika fungsi f_i mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik \vec{x}^* , maka deret Taylor fungsi f_i disekitar titik kesetimbangan \vec{x}^* adalah

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ &+ \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.10)$$

dengan $\eta_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah suku sisa $i = 1, 2, \dots, n$. Hampiran orde satu terhadap f_i menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{x_i \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i x_i}{\|\vec{u}\|} = 0,$$

dimana $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, dengan $u_i = x_i - x_i^*$.

Dengan menggunakan persamaan (2.10) dan mengingat

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt}(x_i - x_i^*),$$

maka persamaan (2.10) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \dots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Karena $f_i(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \dots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan matriks Jacobi $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$

maka persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u} + \vec{\eta}.$$

Jika x_i berada dekat dengan \vec{x}^* , maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.9) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u}. \quad (2.13)$$

Untuk $x_i = x_i^*$ diperoleh $\vec{u} = \vec{0}$ sehingga sistem linear (2.13) memiliki titik kesetimbangan $\vec{u} = \vec{0}$. Selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear akan bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan hasil linearisasi.

Teorema 2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus Nonlinear)

Titik kesetimbangan \vec{x}^* sistem otonomus nonlinear (2.9) bersifat:

1. stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi stabil asimtotik.
2. tak stabil, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi tak stabil

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.3 Angka Reproduksi Dasar

Angka reproduksi dasar R_0 merupakan angka yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular dari individu infeksi primer yang terjadi dalam populasi rentan. Angka tersebut merupakan parameter yang digunakan untuk mengetahui penyebaran suatu penyakit.

Sifat Angka Reproduksi Dasar

1. Jika $R_0 < 1$, maka banyaknya individu yang tertular dari satu individu infeksi berjumlah kurang dari satu individu sehingga penyakit secara perlahan akan menghilang dan tidak akan terjadi endemi.
2. Jika $R_0 > 1$, maka banyaknya individu yang tertular dari satu individu infeksi berjumlah lebih dari satu individu sehingga akan terjadi endemi

(Heffernan, dkk., 2005).

2.4 Kriteria Routh-Hurwitz

Sistem nonlinear berdimensi n memiliki persamaan karakteristik yang secara umum berbentuk

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.14)$$

dengan koefisien $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ adalah bilangan real. Titik kesetimbangan pada sistem otonomus tersebut bersifat stabil asimtotik, jika akar-akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif. Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz pada Teorema (2.3) tanpa mencari nilai eigen dari matriks Jacobi (J).

Teorema 2.3 (Teorema Routh-Hurwitz)

Misal diberikan n matriks Hurwitz sebagai berikut.

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0.$$

Akar persamaan karakteristik akan memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika

$$D_k > 0, k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Misal diberikan sistem otonom berdimensi tiga dengan persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.15)$$

Akar persamaan (2.15) memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika,

$$1. D_1 = a_1 > 0,$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0,$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0, \text{ sehingga } a_3 > 0$$

(Murray, 2002).

2.5 Analisis Kestabilan Global

2.5.1 Fungsi Lyapunov

Definisi 2.3 (Fungsi Lyapunov Lemah)

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$, suatu fungsi $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran $W \in \mathbb{R}^n$ pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi berikut

$$1. \mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0 \text{ dan } \mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$$

$$2. \mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$$

(Alligood, dkk., 2000).

Definisi 2.4 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi \mathcal{L} disebut Lyapunov kuat untuk \vec{x}^* jika terdapat suatu persekitaran W pada \vec{x}^* yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3 dan $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ dengan $\vec{x} \in W$

(Alligood, dkk., 2000).

Teorema 2.4 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

Misalkan \vec{x}^* adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$, titik kesetimbangan \vec{x}^* bersifat sebagai berikut.

1. Stabil global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk \vec{x}^* .
2. Stabil asimtotik global, jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk \vec{x}^*

(Alligood, dkk., 2000)

2.5.2 Kriteria Dulac

Teorema 2.5 (Kriteria Dulac)

Diberikan vektor

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

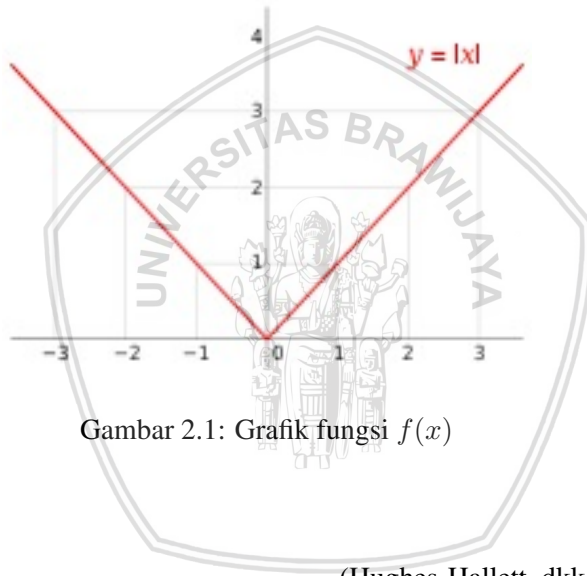
dimana f dan g berada di \mathbf{C}^1 . Misalkan $B(x, y)$ adalah suatu fungsi bernilai riil yang berada pada \mathbf{C}^1 dan terhubung sederhana pada $D \subset \mathbb{R}^2$. Jika $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \neq 0$ dan tidak berubah tanda pada daerah D , maka sistem (2.16) tidak terdapat orbit periodik pada daerah D (Wiggins, 2003).

2.6 Fungsi Piecewise

Fungsi *piecewise* adalah fungsi yang didefinisikan oleh beberapa sub-fungsi yang setiap sub-fungsi memiliki daerah asal dan daerah hasil pada interval tertentu.

Contoh :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$



Gambar 2.1: Grafik fungsi $f(x)$

(Hughes-Hallett, dkk., 2013)

2.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan metode numerik satu langkah karena metode tersebut hanya memerlukan satu titik sebelumnya untuk mendapatkan nilai yang baru. Untuk persamaan $x'(t) = f(t, x(t))$ dan $x(t)$ diketahui, membentuk aproksimasi $x(t+h)$ dengan h ukuran langkah dalam selang t , sehingga diperoleh rumus

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.17)$$

dengan

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t, x(t)), \\k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right), \\k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right), \\k_4 &= f(t + h, x(t) + hk_3)\end{aligned}\tag{2.18}$$

(Lenhart dan Workman, 2007).

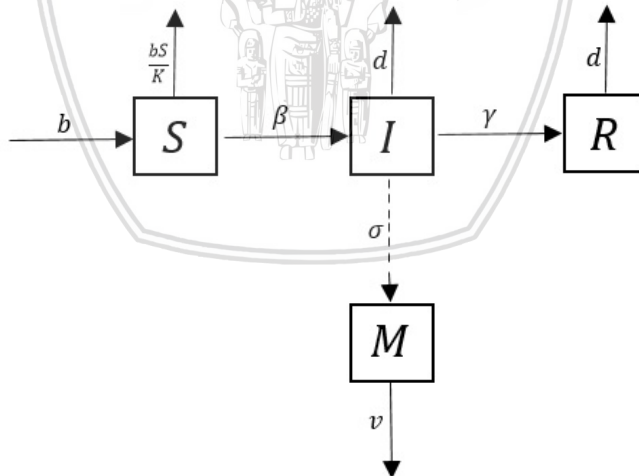




BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas konstruksi model dampak media dalam pengendalian penyakit menggunakan laju transmisi *piecewise* yang terdiri dari tiga populasi, yaitu populasi rentan (S), populasi terinfeksi (I), dan populasi sembuh (R) dengan kepadatan kumulatif media (M). Selanjutnya dilakukan analisis dinamik pada model yang meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal maupun global titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik dengan pendekatan *Runge-Kutta* orde empat untuk mengetahui pengaruh perubahan parameter-parameter terhadap model.

3.1 Konstruksi Model



Gambar 3.1: Model kompartemen SIR dengan media

dengan

- b : laju pertumbuhan intrinsik populasi rentan,
 K : daya dukung lingkungan populasi,

β	: laju interaksi populasi rentan dan populasi terinfeksi,
γ	: laju pengobatan populasi terinfeksi,
d	: laju kematian alami,
σ	: laju pertumbuhan kepadatan kumulatif media,
v	: laju penurunan kepadatan kumulatif media.

3.1.1 Laju perubahan populasi rentan

Perubahan jumlah individu pada populasi rentan (S) dipengaruhi oleh pertumbuhan populasi rentan (S) dan perubahan individu rentan (S) menjadi terinfeksi (I) karena adanya interaksi antar keduanya. Populasi rentan (S) tumbuh mengikuti model logistik dengan daya dukung lingkungan K dan laju pertumbuhan intrinsik b

$$\frac{dS}{dt} = bS(1 - \frac{S}{K}).$$

Adanya interaksi antara individu pada populasi rentan (S) dengan individu pada populasi terinfeksi (I) menyebabkan individu pada populasi rentan (S) berkurang dengan laju transmisi β . Diasumsikan infeksi tidak diturunkan secara genetik dan individu pada populasi terinfeksi (I) tidak dapat kembali menjadi populasi rentan (S)

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI.$$

Dari uraian tersebut, laju perubahan populasi rentan (S) per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = bS(1 - \frac{S}{K}) - \beta SI. \quad (3.1)$$

3.1.2 Laju perubahan populasi terinfeksi

Perubahan jumlah individu pada populasi terinfeksi (I) dipengaruhi oleh perubahan individu rentan (S) menjadi individu terinfeksi (I), perubahan individu terinfeksi (I) menjadi individu sembuh (R), dan kematian alami. Adanya interaksi antara individu pada populasi rentan (S) dengan individu pada populasi terinfeksi (I) menyebabkan individu pada populasi terinfeksi (I) bertambah dengan laju transmisi β

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI.$$

Setiap individu pada populasi terinfeksi (I) dapat menjadi individu sembuh (R) dengan laju penyembuhan γ

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I.$$

Berkurangnya jumlah individu pada populasi terinfeksi (I) disebabkan oleh kematian alami dengan laju sebesar d

$$\frac{dI}{dt} = -dI.$$

Dari uraian tersebut, laju perubahan populasi terinfeksi (I) per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + d)I. \quad (3.2)$$

3.1.3 Laju perubahan populasi sembuh

Perubahan jumlah individu pada populasi sembuh (R) dipengaruhi oleh perubahan individu terinfeksi (I) menjadi individu sembuh (R) dan kematian alami. Bertambahnya individu populasi sembuh (R) disebabkan adanya pengobatan pada individu terinfeksi (I) dengan laju penyembuhan γ

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I.$$

Berkurangnya individu populasi sembuh (R) disebabkan oleh kematian alami dengan laju sebesar d

$$\frac{dR}{dt} = -dR.$$

Dari uraian tersebut, laju perubahan populasi sembuh (R) per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - dR. \quad (3.3)$$

3.1.4 Laju perubahan kepadatan kumulatif media

Perubahan kepadatan kumulatif media (M) dipengaruhi oleh pertumbuhan dan penurunan kepadatan kumulatif media. Bertambahnya kepadatan kumulatif media (M) disebabkan adanya pengiriman informasi dari populasi terinfeksi (I) dengan laju σ

$$\frac{dM}{dt} = \sigma I.$$

Berkurangnya kepadatan kumulatif media disebabkan adanya berita yang telah tertimbun atau kadaluarsa dengan laju v

$$\frac{dM}{dt} = -vM.$$

Dari uraian tersebut, laju perubahan kepadatan kumulatif (M) media per satuan waktu t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dM}{dt} = \sigma I - vM. \quad (3.4)$$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh model SIR dengan media, dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + d)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - dR, \\ \frac{dM}{dt} &= \sigma I - vM. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Diasumsikan dampak media didiskripsikan menggunakan penurunan eksponensial $\beta = \beta_0 e^{-\epsilon m M}$, dengan parameter $m > 0$ yang menggambarkan dampak dari media. Berdasarkan uraian tersebut, model SIR dengan media dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta_0 e^{-\epsilon m M} SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_0 e^{-\epsilon m M} SI - (\gamma + d)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - dR, \\ \frac{dM}{dt} &= \sigma I - vM, \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & \sigma(I) \leq 0 \\ 1, & \sigma(I) > 0, \end{cases}$$

di mana $\sigma(I) = I - I_c$. Laju transmisi *piecewise* ditunjukkan dengan adanya perubahan laju transmisi karena adanya perubahan jumlah individu terinfeksi. Ketika individu terinfeksi kurang dari batas tertentu (I_c), maka tidak ada peliputan media yang ditunjukkan dengan $\epsilon = 0$ sehingga laju transmisi konstan (β_0). Ketika individu terinfeksi mencapai dan melampaui tingkat tertentu (I_c), maka akan ada peliputan media yang ditunjukkan dengan $\epsilon = 1$ sehingga nilai m relatif kecil yang menyebabkan laju transmisi β mendekati konstan β_0 .

Untuk sistem (3.5) dan (3.6) memiliki penyelesaian yang terdefinisi pada $\Omega = \{(S, I, R, M) \in R_+^4 | 0 < S(t) + I(t) + R(t) \leq K, 0 \leq M \leq \frac{\sigma K}{v}\}$. Model SIR dengan media dibagi menjadi dua wilayah yaitu $G_1 = \{(S, I, R, M) \in R_+^4 | \sigma(I) \leq 0\}$ dan $G_2 = \{(S, I, R, M) \in R_+^4 | \sigma(I) > 0\}$. Pada wilayah G_1 , tidak ada dampak dari media sehingga laju transmisi $\beta = \beta_0$, sedangkan pada wilayah G_2 , laju transmisinya $\beta_0 e^{-mM}$.

3.2 Titik Keseimbangan

Sistem (3.5) dan (3.6) dapat disederhanakan dengan mereduksi populasi R . Populasi R tidak mempengaruhi populasi lainnya dan hanya dipengaruhi oleh populasi I , sehingga sistem (3.5) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + d)I, \\ \frac{dM}{dt} &= \sigma I - vM, \end{aligned} \tag{3.7}$$

dan sistem (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta_0 e^{-\epsilon m M} SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_0 e^{-\epsilon m M} SI - (\gamma + d)I, \\ \frac{dM}{dt} &= \sigma I - vM.\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.2.1 Titik kesetimbangan tanpa efek media

Titik kesetimbangan sistem (3.7) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta SI = 0,\tag{3.9a}$$

$$\beta SI - (\gamma + d)I = 0,\tag{3.9b}$$

$$\sigma I - vM = 0.\tag{3.9c}$$

Dari (3.9b) diperoleh

$$\begin{aligned}\beta SI - (\gamma + d)I &= 0 \\ I(\beta S - (\gamma + d)) &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Berdasarkan persamaan (3.10) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $I = 0$ atau $\beta S - (\gamma + d) = 0$. Jika $I = 0$, maka persamaan (3.9a) dan (3.9c) menjadi

$$\begin{aligned}bS\left(1 - \frac{S}{K}\right) &= 0 \\ -vM &= 0\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}S &= 0 \text{ atau } S = K \\ M &= 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit pada sistem tanpa efek media

$$E_{11} = (0, 0, 0)$$

$$E_{12} = (K, 0, 0).$$

Jika $I \neq 0$, maka

$$\beta S - (\gamma + d) = 0$$

$$S^* = \frac{(\gamma + d)}{\beta}. \quad (3.11)$$

Substitusikan persamaan (3.11) ke persamaan (3.9a) sehingga diperoleh

$$bS(1 - \frac{S}{K}) - \beta SI = 0$$

$$\beta SI = bS(1 - \frac{S}{K})$$

$$I^* = \frac{bS(1 - \frac{S}{K})}{\beta S} \quad (3.12)$$

$$I^* = \frac{b}{\beta}(1 - \frac{\gamma + d}{\beta K}).$$

Berdasarkan persamaan (3.11) dan (3.12), persamaan (3.9c) menjadi

$$\sigma I - vM = 0$$

$$vM = \sigma I$$

$$M^* = \frac{\sigma I^*}{v} \quad (3.13)$$

$$M^* = \frac{\sigma b}{v\beta}(1 - \frac{\gamma + d}{\beta K}).$$

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan bahwa terdapat individu terinfeksi dalam populasi, atau dengan kata lain $I^* > 0$ sehingga

$$\frac{b}{\beta}(1 - \frac{\gamma + d}{\beta K}) > 0$$

$$\frac{b}{\beta} - \frac{b(\gamma + d)}{\beta^2 K} > 0$$

$$\frac{\beta K}{(\gamma + d)} > 1.$$

Selanjutnya $\frac{\beta K}{\gamma + d}$ disebut sebagai angka reproduksi dasar (R_0)

$$R_0 = \frac{\beta K}{\gamma + d}. \quad (3.14)$$

Berdasarkan persamaan (3.14), persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S_{13}^* &= \frac{(\gamma + d)}{\beta} \\ S_{13}^* &= \frac{(\gamma + d)}{\beta} \left(\frac{K}{K} \right) \\ S_{13}^* &= \frac{(\gamma + d)K}{\beta K} \\ S_{13}^* &= K \frac{1}{R_0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kemudian persamaan (3.12) menjadi

$$\begin{aligned} I_{13}^* &= \frac{b}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma + d}{\beta K} \right) \\ I_{13}^* &= \frac{b}{\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

dan persamaan (3.13) menjadi

$$\begin{aligned} M_{13}^* &= \frac{\sigma b}{v\beta} \left(1 - \frac{\gamma + d}{\beta K} \right) \\ M_{13}^* &= \frac{\sigma b}{v\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dari uraian di atas diperoleh titik kesetimbangan endemik $E_{13}^* = (S_{13}^*, I_{13}^*, M_{13}^*)$ dengan

$$\begin{aligned} S_{13}^* &= K \frac{1}{R_0}, \\ I_{13}^* &= \frac{b}{\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right), \\ M_{13}^* &= \frac{\sigma b}{v\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned}$$

yang eksis ketika $R_0 > 1$.

3.2.2 Titik kesetimbangan dengan efek media

Titik kesetimbangan sistem (3.8) diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$bS(1 - \frac{S}{K}) - \beta_0 e^{mM} SI, \quad (3.18a)$$

$$\beta_0 e^{mM} SI - (\gamma + d)I, \quad (3.18b)$$

$$\sigma I - vM. \quad (3.18c)$$

Dari (3.18b) diperoleh

$$\begin{aligned} \beta_0 e^{-mM} SI - (\gamma + d)I, \\ I(\beta_0 e^{-mM} S - (\gamma + d)) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Berdasarkan persamaan (3.19) diperoleh dua kemungkinan, yaitu $I = 0$ atau $\beta_0 e^{-mM} S - (\gamma + d) = 0$. Jika $I = 0$, maka persamaan (3.18a) dan (3.18c) menjadi

$$\begin{aligned} bS(1 - \frac{S}{K}) &= 0 \\ -vM &= 0, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} S &= 0 \text{ atau } S = K \\ M &= 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit pada sistem dengan efek media

$$E_{21} = (0, 0, 0)$$

$$E_{22} = (K, 0, 0).$$

Jika $I \neq 0$, maka dari persamaan (3.18b) diperoleh

$$\beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* - (\gamma + d) = 0,$$

$$\beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* = (\gamma + d),$$

$$S_{23}^* = \frac{\gamma + d}{\beta_0 e^{-mM_{23}^*}} \quad (3.20)$$

$$S_{23}^* = \frac{K}{\beta_0} \frac{\gamma + d}{e^{-mM_{23}^*}}$$

$$S_{23}^* = \frac{K}{R_0} e^{mM_{23}^*}.$$

Dari persamaan (3.18a) diperoleh

$$\begin{aligned}
 bS_{23}^*(1 - \frac{S_{23}^*}{K}) - \beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* I_{23}^* &= 0 \\
 b(1 - \frac{S_{23}^*}{K}) - \beta_0 e^{-mM_{23}^*} I_{23}^* &= 0 \\
 b(1 - \frac{S_{23}^*}{K}) &= \beta_0 e^{-mM_{23}^*} I_{23}^* \\
 S_{23}^* &= K(1 - \frac{\beta_0}{b} I_{23}^* e^{-mM_{23}^*}).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dari persamaan (3.18c) diperoleh

$$M_{23}^* = \frac{\sigma I_{23}^*}{v}. \tag{3.22}$$

Substitusikan persamaan (3.22) ke persamaan (3.20) dan (3.21), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 S_{23}^* &= K(1 - \frac{\beta_0}{b} I_{23}^* e^{-\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}}) = g(I) \\
 S_{23}^* &= \frac{K}{R_0} e^{\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}} = h(I).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jika $I = 0$, maka $g(0) = K, h(0) = \frac{K}{R_0}$. Jika $R_0 > 1$, maka $g(0) > h(0)$. Setidaknya dua kurva $S_{23}^* = g(I)$ dan $S_{23}^* = h(I)$ memiliki minimal satu persimpangan positif. Untuk menentukan jumlah persimpangan positif, ditentukan titik singgung dari dua kurva. Dua kurva yang bersimpangan yaitu $g(I) = h(I)$ dan $g'(I) = h'(I)$.

$$\begin{aligned}
 g(I) &= h(I), \\
 1 - \frac{\beta_0}{b} I_{23}^* e^{-\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}} &= \frac{1}{R_0} e^{\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 g'(I) &= h'(I), \\
 \frac{\beta_0}{b} e^{-\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}} (\frac{m\sigma}{v} I_{23}^* - 1) &= \frac{m\sigma}{R_0 v} e^{\frac{m\sigma}{v} I_{23}^*}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Misal $f(I) = e^{\frac{m\sigma I_{23}^*}{v}}$, maka persamaan (3.24) dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\beta_0 I_{23}^*}{bf(I)} &= \frac{f(I)}{R_0} \\ \frac{bf(I) - \beta_0 I_{23}^*}{bf(I)} &= \frac{f(I)}{R_0} \\ f(I)^2 &= \frac{(bf(I) - \beta_0 I_{23}^*)R_0}{b} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Selanjutnya persamaan (3.25) dapat diuraikan menjadi

$$\frac{\beta_0}{bf(I)} \left(\frac{m\sigma}{v} I_{23}^* - 1 \right) = \frac{m\sigma f(I)}{R_0 v} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0 R_0 v}{bm\sigma} \left(\frac{m\sigma}{v} I_{23}^* - 1 \right) &= f(I)^2 \\ \frac{\beta_0 R_0}{b} I_{23}^* - \frac{\beta_0 R_0 v}{bm\sigma} &= f(I)^2 \\ \frac{\beta_0 R_0}{b} \left(I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) &= f(I)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dari (3.26) dan (3.27) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{(bf(I) - \beta_0 I_{23}^*)R_0}{b} &= \frac{\beta_0 R_0 v}{bm\sigma} \left(\frac{m\sigma}{v} I_{23}^* - 1 \right) \\ bf(I) - \beta_0 I_{23}^* &= \beta_0 I_{23}^* - \frac{\beta_0 v}{m\sigma} \\ 2\beta_0 I_{23}^* - \frac{\beta_0 v}{m\sigma} &= bf(I) \\ \beta_0 \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) &= bf(I) \\ \frac{\beta_0}{b} \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) &= f(I) \\ \frac{\beta_0^2}{b^2} \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right)^2 &= f(I)^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dari (3.29) dan (3.28) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{b^2} \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right)^2 &= \frac{\beta_0 R_0}{b} \left(I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) \\ \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right)^2 &= \frac{\beta_0 R_0}{b} \frac{b^2}{\beta_0^2} \left(I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) \\ \left(2I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right)^2 &= \frac{bR_0}{\beta_0} \left(I_{23}^* - \frac{v}{m\sigma} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dimisalkan $\delta = \frac{bR_0}{\beta_0}$, $\alpha = \frac{v}{m\sigma}$, maka

$$\begin{aligned}(2I_{23}^* - \alpha)^2 &= \delta(I_{23}^* - \alpha) \\ 4I_{23}^{*2} - 4\alpha I_{23}^* + \alpha^2 &= \delta I_{23}^* - \delta\alpha \\ 4I_{23}^{*2} - (4\alpha + \delta)I_{23}^* + \delta\alpha + \alpha^2 &= 0 \\ I_{23}^* &= \frac{4\alpha + \delta \pm \sqrt{\delta(\delta - 8\alpha)}}{8}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Dimisalkan $m_0 = \frac{8\beta_0 v}{b\sigma R_0}$, maka $8\alpha = \frac{bR_0}{\beta_0}$

Kasus 1. Jika $0 < m < m_0$, maka $8\alpha < \frac{bR_0}{\beta_0}$ dan $\delta - 8\alpha < 0$ sehingga persamaan (3.31) tidak memiliki solusi real

$$\begin{aligned}I_{23}^* &= \frac{4\alpha + \delta \pm \sqrt{-\delta}}{8} \\ &= \frac{4\alpha + \delta \pm \sqrt{\delta}i}{8} \\ &= \frac{bR_0}{16\beta_0} + \frac{bR_0}{8\beta_0} \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{bR_0}{\beta_0}} i \\ I_{23}^* &= \frac{3bR_0}{16\beta_0} \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{bR_0}{\beta_0}} i.\end{aligned}$$

Kasus 2. Jika $m = m_0$, maka $8\alpha = \frac{bR_0}{\beta_0}$ dan $\delta - 8\alpha = 0$ sehingga persamaan (3.31) memiliki satu akar tunggal dan titik kesetimbangan endemik tunggal

$$\begin{aligned}I_{23}^* &= \frac{4\alpha + \delta \pm \sqrt{0}}{8} \\ &= \frac{4\alpha + \delta}{8} \\ &= \frac{bR_0}{16\beta_0} + \frac{bR_0}{8\beta_0} \\ I_{23}^* &= \frac{3bR_0}{16\beta_0}.\end{aligned}$$

Kasus 3. Jika $m > m_0$, maka $8\alpha > \frac{bR_0}{\beta_0}$ dan $\delta - 8\alpha > 0$ sehingga persamaan (3.31) memiliki dua akar dan tiga titik kesetimbangan

endemik

$$\begin{aligned} I_{23}^* &= \frac{4\alpha + \delta \pm \sqrt{\delta}}{8} \\ &= \frac{bR_0}{16\beta_0} + \frac{bR_0}{8\beta_0} \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{bR_0}{\beta_0}} \\ I_{23}^* &= \frac{3bR_0}{16\beta_0} \pm \frac{1}{8} \sqrt{\frac{bR_0}{\beta_0}}. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh Teorema (2.5) mengenai eksistensi titik kesetimbangan endemik sistem dengan efek media.

Teorema 2.6 Ketika $R_0 > 1$ dan $m = m_0$ dengan $m_0 = \frac{8\beta_0 v}{b\sigma R_0}$, sistem dengan efek media memiliki titik kesetimbangan endemik tunggal $E_{23}^* = (S_{23}^*, I_{23}^*, M_{23}^*)$ yang eksis ketika $R_0 > 1$.

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

3.3.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{11}

Matriks Jacobi pada titik $E_{11} = (0, 0, 0)$ adalah

$$J(E_{11}) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + d) & 0 \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_{11})$ adalah

$$\begin{vmatrix} b - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + d) - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(b - \lambda) \begin{vmatrix} -(\gamma + d) - \lambda & 0 \\ \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(b - \lambda)((-\gamma + d) - \lambda)(-v - \lambda)) = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = -(\gamma + d)$, dan $\lambda_3 = -v$. Karena masing-masing parameter bernilai positif, maka $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ sehingga titik kesetimbangan E_{11} bersifat tidak stabil.

3.3.2 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{12}

Matriks Jacobi pada titik $E_{12} = (K, 0, 0)$ adalah

$$J(E_{12}) = \begin{bmatrix} -b & -\beta K & 0 \\ 0 & \beta K - (\gamma + d) & 0 \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_{12})$ adalah

$$\begin{vmatrix} -b - \lambda & -\beta K & 0 \\ 0 & \beta K - (\gamma + d) - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-b - \lambda) \begin{vmatrix} \beta K - (\gamma + d) - \lambda & 0 \\ \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(-b - \lambda)((\beta K - (\gamma + d) - \lambda)(-v - \lambda)) = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b < 0, \\ \lambda_2 &= \beta K - (\gamma + d) \\ &= (\gamma + d) \left(\frac{\beta K}{(\gamma + d)} - \left(\frac{\gamma + d}{\gamma + d} \right) \right) \\ &= (\gamma + d)(R_0 - 1), \\ \lambda_3 &= -v < 0. \end{aligned}$$

Jika $R_0 < 1$ nilai $\lambda_2 < 0$, maka titik kesetimbangan E_{12} bersifat stabil asimtotik lokal.

3.3.3 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{13}^*

Matriks Jacobi pada titik $E_{13}^* = (\frac{K}{R_0}, \frac{b}{\beta}(1 - \frac{1}{R_0}), \frac{\sigma b}{v\beta}(1 - \frac{1}{R_0}))$ sebagai berikut

$$J(E_{13}^*) = \begin{bmatrix} \frac{-b}{R_0} & -(\gamma + d) & 0 \\ b(1 - \frac{1}{R_0}) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Berdasarkan perhitungan yang dapat dilihat pada Lampiran 1 diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

dengan

$$a_1 = v + \frac{b}{R_0},$$

$$a_2 = b\left(\frac{v}{R_0} + (\gamma + d)\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right),$$

$$a_3 = vb\left((\gamma + d)\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right).$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar dari persamaan karakteristik (3.32) akan mempunyai akar negatif apabila memenuhi $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 > a_3$. Selanjutnya akan ditunjukkan persamaan karakteristik dari matriks (3.32) memenuhi kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut:

1. $a_1 > 0$

Diketahui $a_1 = v + \frac{b}{R_0}$.

Karena $v > 0$, $b > 0$, dan $R_0 > 1$ maka nilai $a_1 > 0$.

2. $a_3 > 0$

Diketahui $a_3 = vb\left((\gamma + d)\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right)$.

Karena masing-masing parameter bernilai positif dan $R_0 > 1$ maka $a_3 > 0$.

3. $a_1a_2 - a_3 > 0$

Diketahui $a_1a_2 - a_3 = v\left(v + \frac{b}{R_0}\right) + b\gamma\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + bd\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$.

Karena masing-masing parameter bernilai positif dan $R_0 > 1$ maka $a_1a_2 - a_3 > 0$. Perhitungan lebih rinci dapat dilihat pada Lampiran 2.

Dengan demikian kestabilan titik kesetimbangan endemik E_{13}^* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3.3.4 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{21}

Matriks Jacobi pada titik $E_{21} = (0, 0, 0)$ sebagai berikut

$$J(E_{21}) = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + d) & 0 \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_{21})$ adalah

$$\begin{vmatrix} b - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + d) - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(b - \lambda) \begin{vmatrix} -(\gamma + d) - \lambda & 0 \\ \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(b - \lambda)((-\gamma + d) - \lambda)(-v - \lambda) = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = -(\gamma + d)$, dan $\lambda_3 = -v$. Karena masing-masing parameter bernilai positif maka nilai $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ sehingga titik kesetimbangan E_{21} bersifat tidak stabil.

3.3.5 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{22}

Matriks Jacobi pada titik $E_{22} = (K, 0, 0)$ sebagai berikut

$$J(E_{22}) = \begin{bmatrix} -b & -\beta_0 e^{-mM} K & 0 \\ 0 & \beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d) & 0 \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_{22})$ adalah

$$\begin{vmatrix} -b - \lambda & -\beta_0 e^{-mM} K & 0 \\ 0 & \beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d) - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-b - \lambda) \begin{vmatrix} \beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d) - \lambda & 0 \\ \sigma & -v - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-b - \lambda)((\beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d) - \lambda)(-v - \lambda)) = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -b < 0, \\ \lambda_2 &= \beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d) \\ &= \frac{(\gamma + d)}{(\gamma + d)} (\beta_0 e^{-mM} K - (\gamma + d)) \\ &= (\gamma + d)(R_0 e^{-mM} - 1), \\ \lambda_3 &= -v < 0.\end{aligned}$$

Jika $R_0 < 1$, maka nilai $\lambda_2 < 0$ sehingga titik kesetimbangan E_{22} bersifat stabil asimtotik lokal.

3.3.6 Kestabilan lokal titik kesetimbangan E_{23}^*

Matriks Jacobi pada titik $E_{23}^* = (S_{23}^*, I_{23}^*, M_{23}^*)$ sebagai berikut

$$J(E_{23}^*) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

dengan

$$\begin{aligned}j_{11} &= b - \frac{2bS_{23}^*}{K} - \beta_0 e^{-mM_{23}^*} I_{23}^*, \\ j_{12} &= -\beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^*, \\ j_{13} &= m\beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* I_{23}^*, \\ j_{21} &= \beta_0 e^{-mM_{23}^*} I_{23}^*, \\ j_{22} &= \beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* - (\gamma + d), \\ j_{23} &= -m\beta_0 e^{-mM_{23}^*} S_{23}^* I_{23}^*.\end{aligned}$$

Matriks Jacobi (3.33) dapat disederhanakan menjadi matriks Jacobi (3.28) sebagai berikut

$$J(E_{23}^*) = \begin{bmatrix} -\frac{bS_{23}^*}{K} & -(\gamma + d) & (\gamma + d)mI_{23}^* \\ b(1 - \frac{S_{23}^*}{K}) & 0 & -(\gamma + d)mI_{23}^* \\ 0 & \sigma & -v \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Proses penyederhanaan matriks (3.33) dapat dilihat pada Lampiran 3. Berdasarkan perhitungan yang dapat dilihat pada Lampiran 4 diperoleh

persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

dengan

$$a_1 = v + \frac{bS_{23}^*}{K},$$

$$a_2 = \frac{bS_{23}^*v}{K} + \frac{K\beta_0}{R_0} \left(b \left(1 - \frac{S_{23}^*}{K} \right) + \sigma m I_{23}^* \right),$$

$$a_3 = \frac{K\beta_0}{R_0} \left(b \left(\sigma m I_{23}^* + v - \frac{vS_{23}^*}{K} \right) \right).$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, akar-akar dari persamaan karakteristik $J(E_{23}^*)$ akan mempunyai akar negatif apabila memenuhi $a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$. Selanjutnya akan ditunjukkan persamaan karakteristik dari matriks $J(E_{23}^*)$ memenuhi kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut:

1. $a_1 > 0$

Diketahui $a_1 = v + \frac{bS_{23}^*}{K}$.

Karena semua parameter bernilai positif maka nilai $a_1 > 0$.

2. $a_3 > 0$

Diketahui $a_3 = \frac{K\beta_0}{R_0} \left(b \left(\sigma m I_{23}^* + v - \frac{vS_{23}^*}{K} \right) \right)$.

Karena masing-masing parameter bernilai positif dan $R_0 > 1$ maka $a_3 > 0$.

3. $a_1 a_2 - a_3 > 0$

Diketahui $a_1 a_2 - a_3 = \frac{bS_{23}^*v^2}{K} + \frac{(bS_{23}^*)^2v}{K^2} + \frac{b^2S_{23}^*\beta_0}{R_0} \left(1 - \frac{S_{23}^*}{K} \right) + \frac{\beta_0\sigma m I_{23}^* bS_{23}^*}{R_0}$.

Karena masing-masing parameter bernilai positif dan $R_0 > 1$ maka $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Perhitungan lebih rinci dapat dilihat pada Lampiran 5.

Dengan demikian kestabilan titik kesetimbangan endemik E_{23}^* bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan

3.4.1 Kestabilan global sistem tanpa efek media titik keseimbangan E_{12}

Misalkan $V(t) = I(t)$ sebagai fungsi Lyapunov pada $\Omega = \{(S, I, R, M) \in R_+^4 | 0 < S(t) + I(t) + R(t) \leq K, 0 \leq M \leq \frac{\sigma K}{v}\}$. Akan ditunjukkan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat pada titik $E_{12} = (K, 0, 0)$ dengan memeriksa apakah fungsi $V(t)$ memenuhi kondisi 1 Definisi 2.3, yaitu

i. $V(\vec{x}^*) = 0$,

Jelas bahwa pada saat E_{12} , diperoleh $V(E_{12}) = 0$.

ii. $V(\vec{x}) > 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^* \in W$,

Karena $V(t) = I(t)$ dan $I(t)$ selalu positif, maka diperoleh $V(\vec{x}) > 0, \forall t > 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^*$.

Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa $V(t)$ memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4, yaitu $V'(\vec{x}) < 0, \forall(\vec{x}) \neq (\vec{x}^*)$.

$$\begin{aligned} V'(t) &= [\beta S - (\gamma + d)]I, \\ V'(t) &= \frac{(\gamma + d)}{(\gamma + d)} [\beta S - (\gamma + d)]I \\ &= (R_0 - 1)(\gamma + d)I. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Karena masing-masing parameter dan $I(t)$ bernilai positif, maka $V'(t) < 0, \forall(\vec{x}) \neq (\vec{x}^*)$ apabila $R_0 < 1$. Jadi $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4 dan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat sehingga E_{12} bersifat stabil asimtotik global.

3.4.2 Kestabilan global dengan efek media titik keseimbangan E_{22}

Misalkan $V(t) = I(t)$ sebagai fungsi Lyapunov pada $\Omega = \{(S, I, R, M) \in R_+^4 | 0 < S(t) + I(t) + R(t) \leq K, 0 \leq M \leq \frac{\sigma K}{v}\}$. Akan ditunjukkan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat pada titik $E_{22} = (K, 0, 0)$ dengan memeriksa apakah fungsi $V(t)$ memenuhi kondisi 1 Definisi 2.3, yaitu

i. $V(\vec{x}^*) = 0$,

Jelas bahwa pada saat E_{22} , diperoleh $V(E_{22}) = 0$.

ii. $V(\vec{x}) > 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^* \in W$,

Karena $V(t) = I(t)$ dan $I(t)$ selalu positif, maka diperoleh $V(\vec{x}) > 0, \forall t > 0, \forall(\vec{x}) \neq \vec{x}^*$.

Oleh karena itu, dapat dilihat bahwa $V(t)$ memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.3. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4, yaitu $V'(t) < 0, \forall(\vec{x}) \neq (\vec{x}^*)$.

$$\begin{aligned} V'(t) &= [\beta e^{-mM} S - (\gamma + d)]I, \\ V'(t) &= \frac{(\gamma + d)}{(\gamma + d)} [\beta e^{-mM} S - (\gamma + d)]I \\ &= (R_0 - 1)(\gamma + d)I. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Karena masing-masing parameter dan $I(t)$ bernilai positif, maka $V'(t) < 0, \forall(\vec{x}) \neq (\vec{x}^*)$ apabila $R_0 < 1$. Jadi $V(t)$ memenuhi Definisi 2.4 dan $V(t)$ merupakan fungsi Lyapunov kuat sehingga E_{22} bersifat stabil asimtotik global.

3.4.3 Kestabilan global sistem tanpa efek media titik kesetimbangan E_{13}^*

Untuk menganalisa kestabilan di titik endemik (E_{13}^*) digunakan Kriteria Dulac dalam Teorema (2.5). Misalkan terdapat nilai kritis R_0 yang dinotasikan R_c . Nilai R_c didapatkan dari titik I_{13}^* . Perhitungan untuk mendapatkan R_c dapat dilihat pada Lampiran 6. Ketika titik endemik (E_{13}^*) berada dalam suatu daerah G_1 , maka didapatkan $1 < R_0 < R_c$. Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan, dapat ditentukan dengan keberadaan orbit periodik. Keberadaan orbit periodik dapat ditunjukkan menggunakan Kriteria Dulac, dengan suatu fungsi Dulac adalah

$$D(S, I, M) = \frac{1}{SI}.$$

Diambil $f_1 = b(1 - \frac{S}{K}S - \beta SI)$, $f_2 = \beta SI - (\gamma + d)I$ dan $f_3 = \sigma I - vM$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(Df_1)}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{bS(1 - \frac{S}{K}) - \beta SI}{SI} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{b(1 - \frac{S}{K}) - \beta I}{I} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{b}{I} - \frac{bS}{KI} - \beta \right) \\
 &= -\frac{b}{KI}, \\
 \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta SI - (\gamma + d)I}{SI} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta S - (\gamma + d)}{S} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\beta - \frac{(\gamma + d)}{S} \right) \\
 &= 0, \\
 \frac{\partial(Df_3)}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\sigma I - vM}{SI} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\sigma}{S} - \frac{vM}{SI} \right) \\
 &= -\frac{v}{SI},
 \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$\frac{\partial(Df_1)}{\partial S} + \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} + \frac{\partial(Df_3)}{\partial M} = \frac{-b}{KI} + \frac{-v}{SI} < 0.$$

Berdasarkan Teorema (2.5) diperoleh kesimpulan bahwa sistem (3.9a), (3.9b), dan (3.9c) tidak memiliki solusi periodik di daerah \mathbb{R}^3 , sehingga tidak ada yang membatasi daerah kestabilan asimtotik. Oleh karena itu, titik (E_{13}^*) tidak hanya stabil asimtotik lokal tetapi juga bersifat asimtotik global jika berada pada daerah G_1 dan memenuhi $1 < R_0 < R_c$.

3.4.4 Kestabilan global sistem dengan efek media titik kesetimbangan E_{23}^*

Untuk menganalisa kestabilan di titik endemik (E_{23}^*) digunakan Kriteria Dulac dalam Teorema (2.5). Ketika titik endemik (E_{23}^*)

berada dalam suatu daerah G_2 , maka didapatkan $R_0 > R_c$. Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan, dapat ditentukan dengan keberadaan orbit periodik. Keberadaan orbit periodik dapat ditunjukkan menggunakan Kriteria Dulac, dengan suatu fungsi Dulac

$$D(S, I, M) = \frac{1}{SI}.$$

Diambil $f_1 = b(1 - \frac{S}{K}S - \beta_0 e^{-mM}SI)$, $f_2 = \beta_0 e^{-mM}SI - (\gamma + d)I$ dan $f_3 = \sigma I - vM$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Df_1)}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{bS(1 - \frac{S}{K}) - \beta_0 e^{-mM}SI}{SI} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{b(1 - \frac{S}{K}) - \beta_0 e^{-mM}I}{I} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{b}{I} - \frac{bS}{KI} - \beta_0 e^{-mM} \right) \\ &= -\frac{b}{KI}, \\ \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta_0 e^{-mM}SI - (\gamma + d)I}{SI} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta_0 e^{-mM}S - (\gamma + d)}{S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\beta_0 e^{-mM} - \frac{(\gamma + d)}{S} \right) \\ &= 0, \\ \frac{\partial(Df_3)}{\partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\sigma I - vM}{SI} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\sigma}{S} - \frac{vM}{SI} \right) \\ &= -\frac{v}{SI} \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$\frac{\partial(Df_1)}{\partial S} + \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} + \frac{\partial(Df_3)}{\partial M} = \frac{-b}{KI} + \frac{-v}{SI} < 0.$$

Berdasarkan Teorema (2.5) diperoleh kesimpulan bahwa sistem (3.18a), (3.18b), dan (3.18c) tidak memiliki solusi periodik di daerah \mathbb{R}^3 , sehingga tidak ada yang membatasi daerah kestabilan asimtotik. Oleh karena itu, titik E_{23}^* tidak hanya stabil asimtotik lokal tetapi juga bersifat asimtotik global jika berada di G_2 dan memenuhi $R_c < R_0$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 pada *software* MATLAB R2017a. Simulasi numerik dilakukan pada dua sistem, setiap sistem disimulasikan dengan kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Hasil dari simulasi numerik akan dibandingkan dengan perhitungan secara analisis yang telah diperoleh.

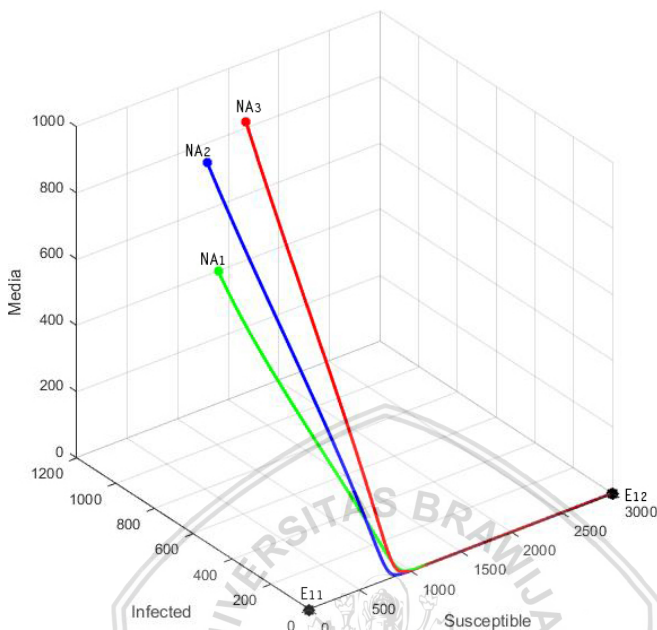
3.5.1 Simulasi numerik pada sistem tanpa pengaruh media

1. $R_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $b = 0.06$, $K = 3000$, $\beta_0 = 0.00053$, $\gamma = 0.9$, $d = 0.7$, $\sigma = 0.09$, $v = 0.9$, dan $\epsilon = 0$ sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{K\beta_0}{\gamma + d} = 0.9937 < 1.$$

Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan $E_{11} = (0, 0, 0)$, $E_{12} = (3000, 0, 0)$, dan $E_{13}^* = (3018.9, -0.7, -0.1)$. Gambar 3.2 menunjukkan bahwa trayektori yang bermula dari tiga nilai awal $(1400, 1200, 400)$, $(1100, 1100, 800)$, dan $(1100, 900, 1000)$ menuju ke titik E_{12} . Hal ini sesuai dengan hasil secara analisis bahwa jika $R_0 < 1$ titik E_{12} stabil asimtotik. Gambar 3.2 menyatakan bahwa populasi rentan akan terus meningkat hingga mencapai ukuran maksimal jumlah populasi rentan yaitu 3000, sedangkan populasi terinfeksi tidak ada dalam populasi.



Gambar 3.2: Potret fase sistem tanpa efek media, $R_0 < 1$

2. $1 < R_0 < R_c$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $b = 0.077$, $K = 3000$, $\beta_0 = 0.00004$, $\gamma = 0.07$, $d = 0.003$, $\sigma = 0.07$, $v = 0.6$, $\epsilon = 0$, dan $I_c = 1500$ sehingga diperoleh

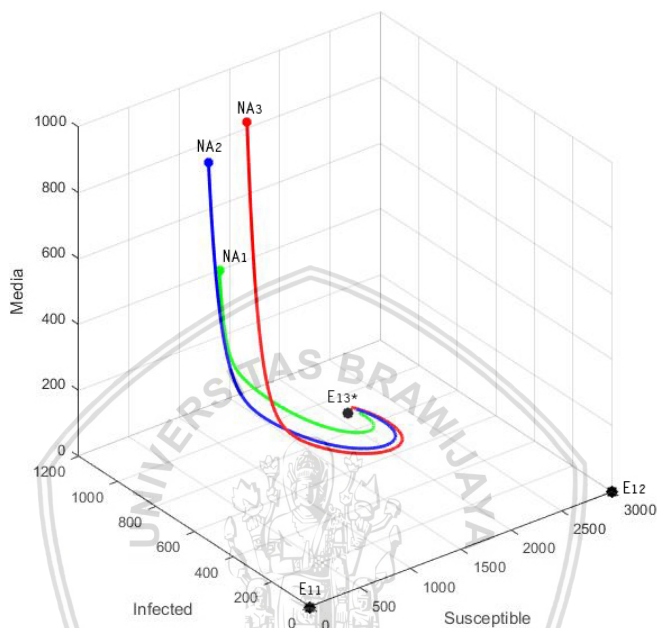
$$R_0 = \frac{K\beta_0}{\gamma + d} = 1.6438,$$

$$R_c = \frac{b}{b - \beta_0 I_c} = 4.529,$$

$$1 < R_0 < R_c$$

Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan $E_{11} = (0, 0, 0)$, $E_{12} = (3000, 0, 0)$, dan $E_{13}^* = (1825, 754, 88)$. Gambar 3.3 menunjukkan bahwa trayektori yang bermula dari tiga nilai awal $(1400, 1200, 400)$, $(1100, 1100, 800)$, dan $(1100, 900, 1000)$ menuju ke titik E_{13}^* . Hal ini sesuai dengan hasil secara analisis

bahwa jika $R_0 > 1$ titik E_{13}^* stabil asimtotik. Gambar 3.3 menyatakan bahwa terdapat populasi terinfeksi pada sistem.



Gambar 3.3: Potret fase sistem tanpa efek media, $1 < R_0 < R_c$

3.5.2 Simulasi numerik pada sistem dengan pengaruh media

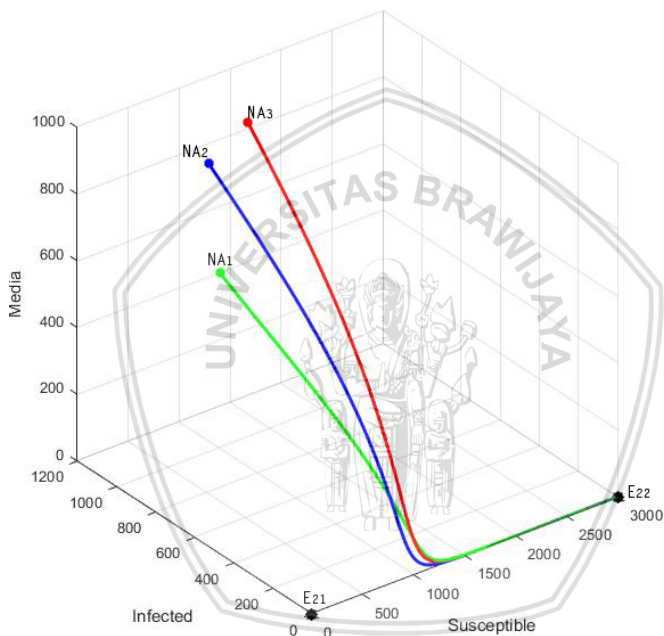
1. $R_0 < 1$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $b = 0.04, K = 3000, \beta_0 = 0.0005, m = 0.000000008, \gamma = 0.9, d = 0.7, \sigma = 0.09, v = 0.9$, dan $\epsilon = 1$, sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{K\beta_0 e^{-mM}}{\gamma + d} = 0.9372 < 1.$$

Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan $E_{21} = (0, 0, 0), E_{22} = (3000, 0, 0)$, dan $E_{23}^* = (3202, 14, -1.4)$. Gambar 3.4 menunjukkan bahwa

trayektori yang bermula dari tiga nilai awal $(1400, 1200, 400)$, $(1100, 1100, 800)$, dan $(1100, 900, 1000)$ menuju ke titik E_{22} . Hal ini sesuai dengan hasil secara analisis bahwa jika $R_0 < 1$ titik E_{22} stabil asimtotik. Gambar 3.4 menyatakan bahwa populasi rentan akan terus meningkat hingga mencapai ukuran maksimal jumlah populasi rentan yaitu 3000, sedangkan populasi terinfeksi tidak ada dalam populasi.



Gambar 3.4: Potret fase sistem dengan pengaruh media, $R_0 < 1$

2. $R_c < R_0$

Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $b = 0.095$, $K = 3000$, $\beta_0 = 0.000052$, $m = 0.0000008$, $\gamma = 0.04$, $d = 0.005$, $\sigma = 0.07$, $v = 0.6$, $\epsilon = 1$ dan $I_c = 1000$

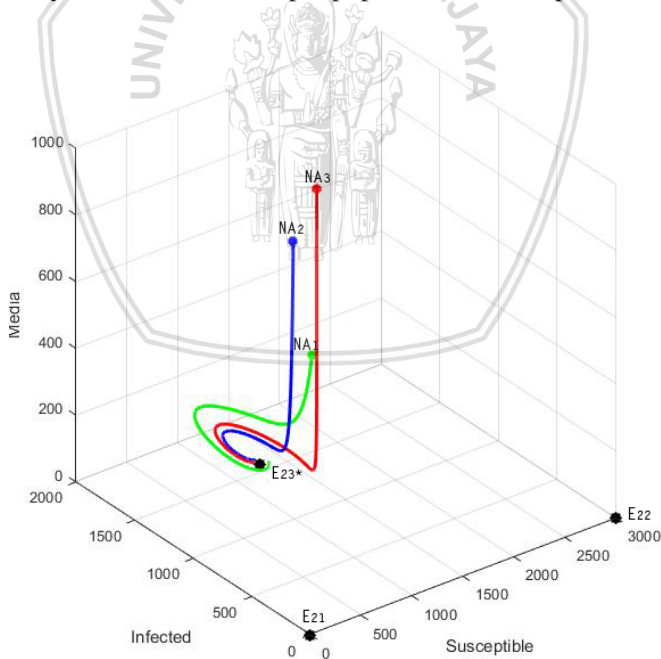
sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{K\beta_0 e^{-mM}}{\gamma + d} = 3.4639,$$

$$R_c = \frac{b}{b - \beta_0 e^{-mM} I_c} = 2.2072,$$

$$R_c < R_0$$

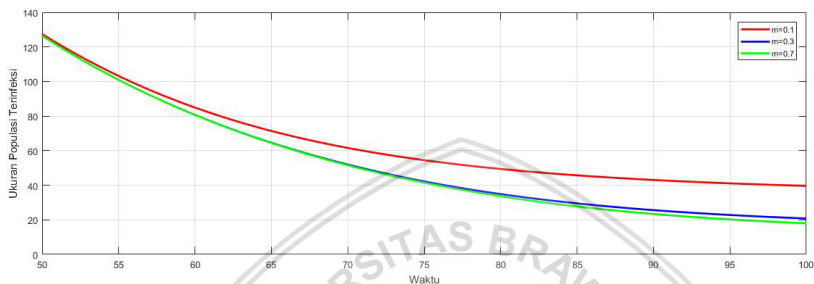
Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, diperoleh titik kesetimbangan $E_{21} = (0, 0, 0)$, $E_{22} = (K, 0, 0)$, dan $E_{23}^* = (866.2, 1186.6, 138.4)$. Gambar 3.5 menunjukkan bahwa trayektori yang bermula dari tiga nilai awal $(1400, 1200, 400)$, $(1100, 1100, 800)$, dan $(1100, 900, 1000)$ menuju ke titik E_{23}^* . Hal ini sesuai dengan hasil secara analisis bahwa jika $R_0 > 1$ titik E_{23}^* stabil asimtotik. Gambar 3.5 menyatakan bahwa terdapat populasi terinfeksi pada sistem.



Gambar 3.5: Potret fase sistem pengaruh media, $R_c < R_0$

3.5.3 Pengaruh dampak media terhadap populasi terinfeksi

Simulasi ini digunakan untuk mengamati hubungan antara dampak media dengan populasi terinfeksi. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini, yaitu $b = 0.095$, $K = 3000$, $\beta_0 = 0.000052$, $\gamma = 0.04$, $d = 0.005$, $\sigma = 0.07$, $v = 0.6$, $\epsilon = 1$ dan $m_1 = 0.1$, $m_2 = 0.3$, $m_3 = 0.7$. dengan nilai awal (1400, 1200, 400)



Gambar 3.6: Pengaruh media terhadap populasi terinfeksi

Gambar 3.6 menunjukkan hubungan dampak media dengan jumlah populasi terinfeksi. Semakin besar dampak media, semakin kecil jumlah populasi terinfeksi. Sehingga untuk mengurangi populasi terinfeksi pada suatu wabah diperlukan adanya peliputan oleh media. Media dapat memengaruhi perilaku masyarakat dengan menginformasikan cara mencegah dan mengobati wabah penyakit, sehingga media memiliki peran dalam mencegah dan mengendalikan penyakit.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Model dampak media terhadap pengendalian penyakit dengan menggunakan laju transmisi *piecewise* berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang terdiri dari tiga populasi, yaitu populasi rentan (S), populasi terinfeksi (I), dan populasi sembuh (R) dengan kepadatan kumulatif media (M).
2. Model dampak media terhadap pengendalian penyakit dengan menggunakan laju transmisi *piecewise* memiliki dua sistem yaitu sistem tanpa pengaruh media dan sistem dengan pengaruh media. Masing-masing sistem memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu dua titik kesetimbangan bebas penyakit dan satu titik kesetimbangan endemik.
3. Titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik eksis jika $R_0 > 1$. Selanjutnya berdasarkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, satu titik kesetimbangan bebas penyakit selalu tidak stabil, sedangkan satu titik kesetimbangan bebas penyakit lainnya bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $R_0 < 1$. Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $R_0 > 1$ dan berada pada masing-masing wilayah sistem.
4. Hasil simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Populasi terinfeksi pada suatu wabah penyakit dapat berkurang dengan adanya peliputan oleh media.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk menambahkan adanya peliputan media pada populasi rentan dan sembuh.



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag. New York.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2012. *Elementary Differential Equation*. Tenth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez 2010. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer. New York
- Cui, J., Y. H. Sun, dan H.P. Zhu. 2008. The Impact of Media on The Control of Infectious Diseases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. Vol. 20, No. 1, pp. 31-53.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Heffernan, J. M., R. J. Smith, dan L.M. Whal. 2005. Perspectives on the Basic Reproductive Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. 2:281-293
- Hughes-Hallet, D., Gleason, McCallum. 2013. *Calculus*. Sixth Edition. John Wiley and Sons, Inc. United State of America.
- Lenhart, S. dan J. T. Workman. 2007. *Optimal Control Applied to Biological Models*. First Edition. Taylor and Francis Group. London.
- Liu, M., Y. Chang, dan L.Zuo. 2016. Modelling the Impact of Media in Controlling the Diseases with a Piecewise Transmission Rate. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Article ID 3458965.
- Liu, R.S., J. H. Wu, dan H. P. Zhu. 2007. Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. Vol. 8,

No. 3, pp. 153-164.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.

Nova, Firsan. 2009. *Crisis Public Relations* (Bagaimana PR Menangani Krisis Perusahaan). Jakarta : Selemba Medika

Tchuenche, J.M., N. Dube, C. P. Bhunu, R. J. Smith, dan C. T. Bauch. 2011. The Impact of Media Coverage on The Transmission Dynamics of Human Influenza. *BMC Public Health*. Vol. 11, article S5.

Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer-Verlag. New York.

